MATEMATIKA 1

Ribos įrodymas

$\lim_{x\to a} f(x) = L$ reiškia:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \quad 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Pirma ε, po to δ(ε). Šablonas: „Tegu ε>0. Imame δ=…>0. Jei 0<|x−a|<δ, tai …<ε.“ δ negali priklausyti nuo laisvo x. Funkcija nebūtinai apibrėžta pačiame a.

Kaip parinkti δ

Tiesinei $f(x) = mx + c$, $m \neq 0$: $|f(x) - f(a)| = |m||x-a|$, tinka $\delta = \dfrac{\varepsilon}{|m|}$. Kvadratui ties a: ribok $|x-a| < 1$, tada $|x+a| < 2|a| + 1$. Tinka $\delta = \min(1, \dfrac{\varepsilon}{2|a|+1})$. Modulis: $|x-a| < \delta \iff a - \delta < x < a + \delta$.

Kontrolinio šaknies įrodymas

$a = 6$, $L = 5$, $f(x) = \sqrt{4x+1}$. Imk $\eta = \min(\varepsilon, 1)$. Iš $|f(x) - 5| < \eta$ gauname:

$$6 - \frac{10\eta - \eta^2}{4} < x < 6 + \frac{10\eta + \eta^2}{4}.$$

Tinka $\delta = \dfrac{10\eta - \eta^2}{4} > 0$. Trumpesnis kelias: $|f(x) - 5| \le \dfrac{4|x-6|}{5}$; tinka $\delta = \min(1, \dfrac{5\varepsilon}{4})$.

Sekos ir begalinės ribos

$a_n \to L$: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}, n > N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$. $a_n \to +\infty$: $\forall M > 0\ \exists N, n > N \Rightarrow a_n > M$. $f(x) \to +\infty$ ties a: $\forall M > 0\ \exists \delta > 0, 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) > M$. $-\infty$ atveju reikalaujame $f < -M$.

Pagrindinės ribos be Lopitalio

Kai $t \to 0$ (kampai radianais):

$$\frac{\sin t}{t} \to 1, \quad \frac{\tan t}{t} \to 1, \quad \frac{e^t - 1}{t} \to 1,$$
$$\frac{\ln(1+t)}{t} \to 1, \quad \frac{(1+t)^\alpha - 1}{t} \to \alpha.$$

$(1+t)^{\frac{1}{t}} \to e$. Jei $u \to 0$, $uv \to c$, $1 + u > 0$, tada $(1+u)^v \to e^c$. $|q| < 1 \Rightarrow q^n \to 0$.

Ribų skaičiavimo kelrodis

Įstatyk → nustatyk formą → pertvarkyk → pritaikyk ribą. $\dfrac{0}{0}$ su polinomais: skaidyk daugikliais. Šaknų skirtumas: jungtinis reiškinys, $(\sqrt{A} - \sqrt{B})(\sqrt{A} + \sqrt{B}) = A - B$. $\dfrac{\infty}{\infty}$: dalyk iš dominuojančio dydžio. 1^∞: e riba arba logaritmas. Dalmeniui baigtinių ribų taisyklė galioja, jei vardiklio riba nelygi 0. $\sqrt{x^2} = |x|$.

Dalinės ir rekursinės sekų ribos

Periodui p skaidyk $n = pk + r$. Kiekvienos klasės riba — dalinė riba. Aprėžtai sekai lim sup — didžiausia, lim inf — mažiausia dalinė riba. Jei jos skiriasi, bendros ribos nėra. Rekursijai: ① kandidatas $L = g(L)$; ② indukcija aprėžtumas; ③ monotoniškumas; ④ konvergavimo teorema; ⑤ perėjimas prie ribos, jei g tolydi. Vien ① nepakanka.

Tolydumas ir asimptotės

Tolydumas vidiniame taške: $\lim_{x\to a-} f = \lim_{x\to a+} f = f(a)$. Vertikali $x = a$: bent viena vienpusė riba $\pm\infty$. Tiesei $y = kx + b$ kiekviena kryptimi atskirai:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \qquad b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx).$$

Abu turi būti baigtiniai. k=0 — horizontali. Vardiklio nulis gali būti tik skylė, todėl tikrink ribą.

MATEMATIKA 1

Išvestinė pagal apibrėžimą

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Įstatyk x+h → atimk visą f(x) → pertvarkyk → riba. ln(x+5): $\ln(x+5+h)-\ln(x+5)=\ln(1+\frac{h}{x+5})$; pakeisk $t=\frac{h}{x+5}$ ir taikyk $\frac{\ln(1+t)}{t}\to 1$. Rezultatas $\frac{1}{x+5}$, x>−5. Diferencijuojamumas ⇒ tolydumas; atvirkščiai nebūtinai.

Elementariųjų funkcijų lentelė

$C'=0$; $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$ leistinoje srityje. $(e^x)'=e^x$; $(a^x)'=a^x\ln a$, a>0. $(\ln|x|)'=\frac{1}{x}$, x≠0. $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$, x>0, a>0, a≠1. $(\sin x)'=\cos x$; $(\cos x)'=-\sin x$; $(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$; $(\cot x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$. Trigonometriniai kampai radianais.

Atvirkštinės trigonometrinės

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad (\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

kai |x|<1.

$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2},\quad x\in\mathbb{R}.$$

Sudėtiniam argumentui dar daugink iš vidaus išvestinės.

Suma, sandauga, dalmuo

$$(cu)'=cu',\quad (u\pm v)'=u'\pm v',$$

$$(uv)'=u'v+uv',\qquad \left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2},\quad v\neq 0.$$

Sandaugos išvestinė nėra u'v'. Prieš diferencijuodamas gali supaprastinti, bet išsaugok pradinę apibrėžimo sritį.

Grandinės taisyklė

$$[f(g(x))]'=f'(g(x))g'(x).$$

$(u^\alpha)'=\alpha u^{\alpha-1}u'$; $(\sqrt{u})'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$, u>0. $(\ln|u|)'=\frac{u'}{u}$, u≠0. $(e^u)'=e^u u'$. $(\sin u)'=\cos u\,u'$. Eik iš išorės į vidų; daugink kiekvieną sluoksnį. Pvz., $(\sin((3x+1)^2))'=6(3x+1)\cos((3x+1)^2)$.

Logaritminė ir neišreikštinė

$y=u^v$, u>0: $\ln y=v\ln u$, todėl

$$y'=u^v\left(v'\ln u+v\frac{u'}{u}\right).$$

$(x^x)'=x^x(\ln x+1)$, x>0. Neišreikštinei: $(y^2)'=2yy'$, $(xy)'=y+xy'$. Iš $F(x,y)=0$: $y'=-\frac{F_x}{F_y}$, kai $F_y\neq 0$ ir galioja vietinio diferencijuojamo sprendinio sąlygos. Pvz., $x^2+y^2=25\Rightarrow y'=-\frac{x}{y}$, y≠0.

Aukštesnės išvestinės

$f''=(f')'$, $f^{(4)}=(f''')'$. Leibnico formulė:

$$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(k)}v^{(n-k)}.$$

4 eilės koeficientai: 1, 4, 6, 4, 1. $(e^{ax})^{(n)}=a^n e^{ax}$. $(\ln x)^{(n)}=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$, x>0, n≥1. Kontrolinio $x^4\ln(2x)$ ketvirtoji išvestinė: $24\ln(2x)+50$, x>0.

Diferencialas ir aproksimacija

$$dx=\Delta x,\quad dy=f'(a)dx,\quad \Delta y=f(a+\Delta x)-f(a).$$

$$\Delta y\approx dy,\quad f(a+\Delta x)\approx f(a)+f'(a)\Delta x.$$

Rinkis artimą patogų a. $\sqrt{4{,}1}\approx 2+(\frac{1}{4})\cdot 0{,}1=2{,}025$. Santykinis mažos paklaidos įvertis: $\frac{|dy|}{|f(a)|}$ (kai f(a)≠0); procentinis — kart 100 %. Diferencialas yra tikslus tiesinio modelio pokytis, ne tikras Δy.

MATEMATIKA 1

Liestinė, normalė, kampas

Liestinė: $y - f(a) = f'(a)(x - a)$. Normalė, kai f'(a)≠0: $y - f(a) = -\frac{x - a}{f'(a)}$. Jei f'(a)=0, normalė x=a. Mažesniam kampui tarp liestinių: $\tan\varphi = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right|$. Jei $m_1 m_2 = -1$ — statmenos.

Parametrinė ir atvirkštinė

$x = x(t)$, $y = y(t)$, x'(t)≠0:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(\frac{dy}{dx})'_t}{x'(t)}.$$

Antroji nėra $\frac{y''(t)}{x''(t)}$. Jei g=f⁻¹ ir f'(a)≠0: $g'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$, kai atvirkštinė apibrėžta atitinkamoje aplinkoje.

Funkcijos tyrimas

Sritis → ribos ir trūkiai → asimptotės → f' ženklai → f″ ženklai → grafikas. f'>0: didėja, f'<0: mažėja. f' iš + į −: maksimumas; iš − į +: minimumas. f″>0: nuolydis didėja (dubuo), f″<0: mažėja (kepurė). Perlinkiui būtinas išlinkio pokytis. f'=0 ar f″=0 savaime nepakanka. Absoliutiems ekstremumams uždarame intervale tikrink ir kraštus.

Teiloro polinomas ir diferencialai

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k.$$

Esant reikalingam glodumui: $R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)(x - a)^{n+1}}{(n+1)!}$, ξ tarp a ir x. Kai x nepriklausomas, dx pastovus: $d^n y = f^{(n)}(x)(dx)^n$. Tai ne $(dy)^n$. Prie 0: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + O(x^3)$; $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + O(x^5)$; $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4)$; $\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3)$.

Lopitalis tik jei leidžiama

Tik $\frac{0}{0}$ arba $\frac{\infty}{\infty}$ formai. Funkcijos diferencijuojamos pradurtoje aplinkoje, g'≠0; egzistuoja išvestinių santykio riba:

$$\lim \frac{f}{g} = \lim \frac{f'}{g'}.$$

Kaskart kartojant tikrink sąlygas. Tai ne trupmenos išvestinė. Jei prašoma ribų pagal bendras taisykles be Lopitalio, šio metodo nenaudok. Kitus neapibrėžtumus pirma pertvarkyk.

Integralų pradžia

$\int f(x)dx = F(x) + C$, kai F'=f. $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, kai f tolydi. $\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C$, p≠−1; $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$. $\int e^x dx = e^x + C$; $\int \cos x dx = \sin x + C$; $\int \sin x dx = -\cos x + C$. Pakeitimas: $u = g(x)$, du=g'(x)dx. Dalimis: $\int u\,dv = uv - \int v\,du$.

Integralo prasmė ir patikra

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x.$$

Tai plotas su ženklu. Geometriniam plotui integruok |f| arba skaidyk ties nuliais. Fizikoje $\Delta x = \int v\,dt$, bet kelias $s = \int |v|dt$. Pirmykštę tikrink diferencijuodamas. Neapibrėžtiniam +C būtina; apibrėžtinio atsakymas — skaičius.

Prieš atiduodant kontrolinį

Ar patikrinau sritį? Ar riba nebuvo tiesiog pavadinta $\frac{0}{0}$? Ar ε—δ įrodyme kiekvienas ε ir tinkama δ? Ar rekursijos konvergavimas įrodytas? Ar asimptotėms tikrinau abi begalybes ir |x|? Ar grandinėje nepraleidau vidaus išvestinės? Ar „pagal apibrėžimą“ tikrai panaudojau ribą? Ar diferencialo apytikslę reikšmę pažymėjau ≈?